Cálculo simplificado de parámetros ortodrómicos para navegación:
Derrota ortodrómica y rumbo inicial.

En este documento deduciremos algunas fórmulas básicas para el cálculo en la navegación ortodrómica, pensando en usarlas en algunas aplicaciones para móviles. Se intentará la máxima simplicidad cubriendo unos mínimos preestablecidos de precisión en los resultados. El documento pretende ser didáctico mediante explicaciones e ilustraciones, a la vez que riguroso en la deducción de las fórmulas. Se incluirán conceptos básicos necesarios para el fácil seguimiento de la lectura.

Sección 1: Cálculo simplificado de la distancia ortodrómica entre dos puntos de la superficie terrestre.

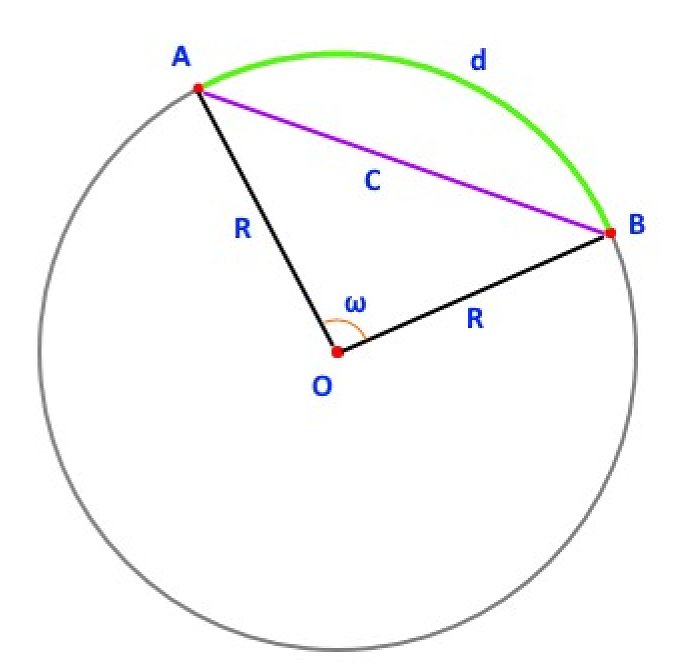
Varias son las formulaciones existentes para calcular la distancia mínima entre dos puntos de la superficie terrestre sin abandonar ésta y sin desviarse a derecha o a izquierda, es decir: siguiendo una trayectoria geodésica. Si el lector está interesado en ojear otros desarrollos, los encontrará fácilmente en los temas: triángulo esférico, fórmulas de Bessel, de Haversine,…

Aquí realizaremos un desarrollo básico a partir de conceptos fundamentales, como si se enfrentara este problema por primera vez.

Para calcular la derrota ortodrómica, o distancia ortodrómica, calcularemos el arco de circunferencia comprendido entre los dos puntos de la superficie terrestre. Este círculo es llamado máximo porque su centro coincide con el centro de la tierra y es el mayor círculo que la esfera terrestre puede contener.

Aquí estamos haciendo una primera aproximación al considerar la tierra como una esfera. Esto simplificará mucho los cálculos, pero tendremos que cuantificar el error que estamos dispuestos a asumir en el resultado. La tierra es más parecida a un elipsoide de revolución con un cierto achatamiento de los polos. Para más información, mírese el tema del geoide terrestre.

Podemos visualizar nuestro objetivo observando el esquema del círculo de la ilustración.



Queremos conocer la distancia **d** de la trayectoria del arco de círculo máximo que separa los puntos **A** y **B** cuyas posiciones son conocidas. Este círculo máximo lo es porque su centro coincide con el centro **O** de la esfera terrestre. Este origen **O** dista de los puntos **A** y **B** precisamente el radio **R** terrestre. Se nos ocurre calcular la longitud del arco **d** como el producto del radio **R** por el ángulo **ω** formado por los radios hacia los puntos **A** y **B**.

Así pues, obtenemos una primera fórmula,

fórmula 1: $d=R\cdot\omega$

El radio R es el radio terrestre, conocido, y tomaremos su valor promedio asumiendo perder un poco de precisión. El radio ecuatorial es de 6378 km, mientras que el radio polar es de 6356 km.
Nosotros vamos a usar el radio volumétrico medio de 6371 km, que es el radio que tendría una esfera de igual volumen que nuestro planeta. Tomaremos **R** como 6371000 metros para nuestros cálculos.

Pero ahora surge un objetivo intermedio porque no conocemos el ángulo **ω** que forman los radios. Si volvemos a mirar la figura 1, observamos que los puntos **A** , **B** forman con el centro **O** un triángulo. Si conociésemos sus tres lados podríamos calcular el ángulo fácilmente con la fórmula para hallar el lado *a* de un triángulo conociendo los otros dos lados *b* y *c*, y el ángulo *A* entre ellos:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$

En nuestro caso, *c* es la cuerda **C**, mientras que *b* y *c* son ambos el radio terrestre **R**, y el ángulo *A* es el que en la figura hemos llamado **ω** en la figura 1. Y sustituyendo así obtenemos la fórmula

$C^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos\omega$ y simplificando $C^2 = 2 \cdot R^2 \cdot (1 - \cos\omega)$

Ignoramos la longitud de la cuerda **C** y el valor del ángulo **ω**, pero si llegamos a calcular **C** podríamos obtener **ω** despejándola y expresando la

fórmula 2: $$\omega = \arccos\left(1 - \frac{C^2}{2 \cdot R^2}\right)$$

Ahora sustituimos ω en la *fórmula 1* por su expresión de la *fórmula 2*, y así conseguimos la

fórmula 3: $$d = R \cdot \arccos\left(1 - \frac{C^2}{2 \cdot R^2}\right)$$

Nuestro problema consiste ahora en conseguir hallar la longitud de la cuerda C que es más sencillo, pues consiste en calcular la distancia recta entre dos puntos **A** y **B** del espacio.

Si conociésemos las coordenadas cartesianas *x*, *y*, *z* de ambos puntos será inmediato el cálculo de la distancia que los separa.

Nombramos las coordenadas cartesianas del punto **A** como: x_A, y_A, z_A correspondientes a los ejes cartesianos, e igualmente denominamos x_B, y_B, z_B como las coordenadas del punto **B**. Ahora vemos claro que la longitud de la cuerda C que va desde el punto A hasta el punto B será el resultado de la

fórmula 4: $$C^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2$$

Sólo un detalle: los puntos de la superficie terrestre suelen estar expresados mediante las coordenadas geodésicas de *latitud* y *longitud*. La *latitud* es el ángulo que hay que recorrer desde el ecuador terrestre hasta el punto de la superficie considerado. Todos los puntos del ecuador tienen *latitud* 0º, el polo norte tiene *latitud* de 90º (positivos) y el polo sur tiene *latitud* de -90º (negativos).

Cualquier punto del hemisferio norte tiene una *latitud* comprendida entre 0º y 90º (+90º), mientras que los puntos del hemisferio sur tienen una *latitud* negativa entre 0º y -90º sexagesimales.

Hay una forma de expresar *latitudes* hacia el sur como, por ejemplo 45 ºS para indicar 45 grados hacia el sur, pero vamos a expresar *latitudes* sur como si fueran *latitudes* norte negativas: -45 ºN equivalentes.
Por otra parte, la longitud es la otra coordenada geodésica que expresa el ángulo que hay que recorrer sobre el ecuador desde un meridiano de referencia (meridiano de Greenwich) hacia el este hasta llegar al punto del ecuador más próximo al punto de la superficie que deseamos referir.

Hay varias maneras de expresar la misma longitud. Por ejemplo, 250º (hacia el este) sería equivalente a 110 ºO, 110º hacia el oeste. Pero nosotros usaremos siempre grados hacia el este. Cuando el ángulo sea mayor de 180 ºE usaremos cantidades negativas hacia el este equivalentes a positivas hacia el oeste. Es decir, 110 ºO será equivalente a 250 ºE como también equivaldrá a -110 ºE (grados este negativos). Nosotros usaremos esta última forma por ser la más actual y dominante.

Generalmente la latitud y la longitud se expresan en grados sexagesimales. Aunque también hay otras unidades como grados centesimales o radianes.

Estos últimos (radianes) son empleados por muchas calculadoras en sus funciones trigonométricas, por lo que a veces tendremos que convertir entre grados sexagesimales y radianes. Una vuelta completa tiene 360º pero también 2·π radianes, por lo que 1º = π / 180 radianes. Y, a la inversa, 1 radián = 180 / π grados.

Tradicionalmente una fración de grado es expresada mediante *minutos* y *segundos*. De manera que 60 *segundos* hacen un *minuto*, y 60 *minutos* hacen un *grado* (aquí no una hora). El símbolo de grado es º mientras que el de *minuto* es ' (comilla simple) y el de *segundo* es '' (doble comilla).

El uso de GPS y otros sistemas actualizados ha relegado el uso de los *minutos* y *segundos* para utilizar mayoritariamente los grados con cifras decimales. En este documento haremos uso del punto decimal (y no de la coma) para referirnos a números con parte fraccionaria.

Convertir a esta notación es sencillo. Por ejemplo, supongamos que nos dan un ángulo (latitud o longitud) de la forma 24º 8' 35'' y deseamos convertirlo a grados con decimales. Calcularemos 24 + 8 / 60 + 35 / 3600 para obtener el resultado 24.143055 grados sexagesimales, o también 24.143055º en forma más breve.

Como detalle histórico aportamos que una milla naútica es la distancia recorrida sobre un meridiano cubriendo un ángulo de un *minuto* de *latitud*. Obsérvese que la distancia de un *grado* de *longitud* sobre un paralelo es indeterminada porque el radio de giro depende de la distancia al eje de la tierra y esta distancia depende a su vez de la *latitud*.

Imagine que se halla a un metro del polo norte geográfico y hace un viaje de 180º hacia el este; la distancia recorrida será de tan solo de unos 3 metros y 14 centímetros, exactamente π metros.

Proseguimos con nuestra tarea de calcular el valor de la cuerda al cuadrado, es decir **C^2** mediante la

fórmula 4: $$C^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2$$

Antes tendremos que hallar las coordenadas cartesianas a partir de las respectivas *latitudes* y *longitudes*. Para ello vamos establecer qué símbolo representará cada uno de esos parámetros. Usaremos las letras minúsculas x, y, z para expresar coordenadas cartesianas. Usaremos la letra δ (delta) del alfabeto griego para significar *latitud*. Con la letra λ (lambda) del alfabeto griego expresaremos la *longitud*. Y usaremos las mayúsculas $_A$ y $_B$ como subíndices para expresar que un parámetro corresponde al punto **A** o al punto **B**.

La notación elegida queda así:

x_A coordenada *x* del punto **A**
y_A coordenada *y* del punto **A**
z_A coordenada *z* del punto **A**
x_B coordenada *x* del punto **B**
y_B coordenada *y* del punto **B**
z_B coordenada *z* del punto **B**
δ_A *latitud* del punto **A**
λ_A *longitud* del punto **A**
δ_B *latitud* del punto **B**
λ_B *longitud* del punto **B**

Veamos ahora cómo convertir el sistema de coordenadas geodésicas (δ, λ) en un sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) para poder aplicar la *fórmula 4* ya vista. Si nos fijamos en la figura 2, veremos que es muy fácil obtener la coordenada z del punto **A** usando de la trigonometría el seno de su latitud con la

fórmula 5: $z_A = R \cdot sen\, \delta_A$

Por otra parte el radio **R** proyecta sobre el plano ecuatorial una distancia horizontal **H** que luego usaremos para calcular otras coordenadas. Esta proyección **H** la calculamos con la

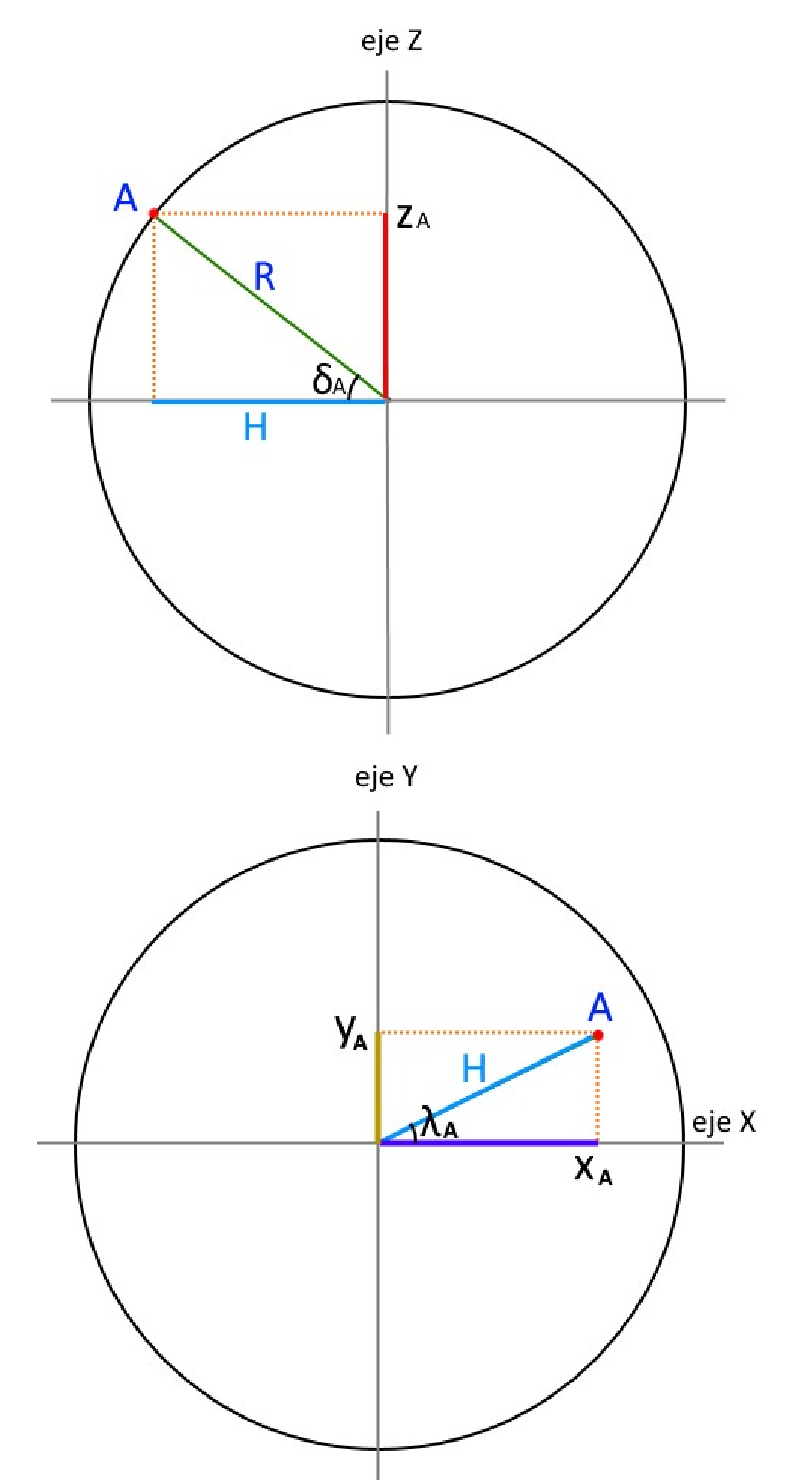
fórmula 6: $H = R \cdot \cos \delta_A$

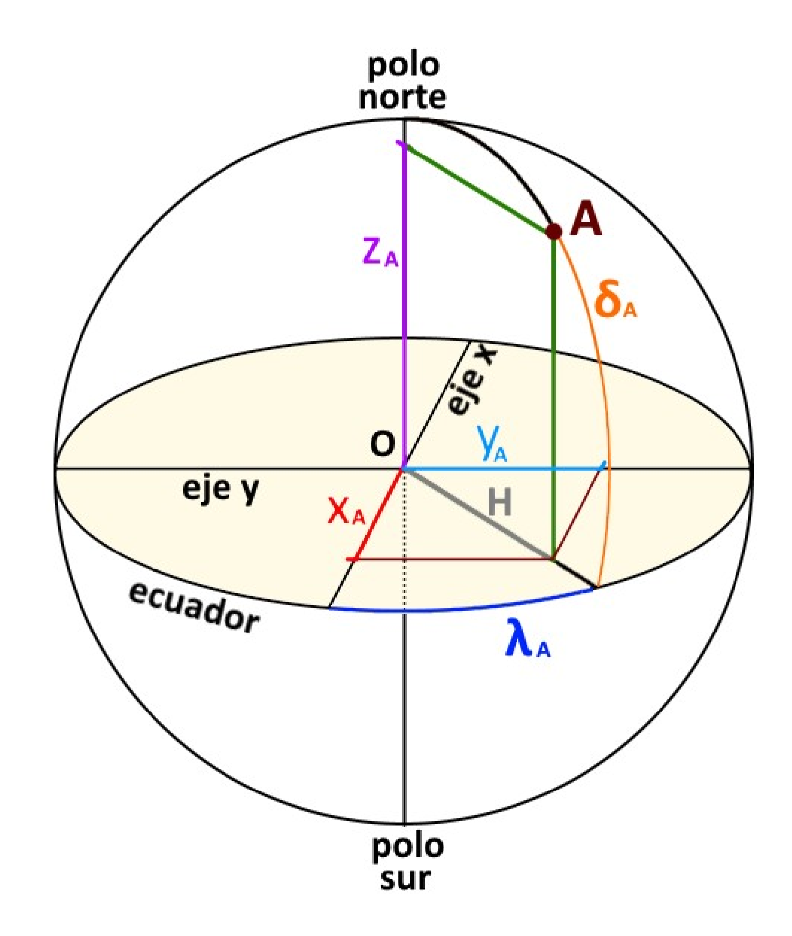
Ahora vamos a observar esta esfera desde una perspectiva cenital, situados encima del polo norte y mirando hacia el sur para observar el plano ecuatorial desde arriba. Esta situación queda representada en la figura 3.

Recordemos que la circunferencia que vemos ahora es el ecuador terrestre. La proyección del radio al punto **A** sobre el ecuador es **H** y el ángulo corresponde a la longitud de **A**. Hemos escogido el eje **X** paralelo al meridiano 0 (de Greenwich). De nuevo mediante trigonometría calculamos las coordenadas x_A , y_A por medio de

fórmula 7: $x_A = H \cdot \cos \lambda_A$

fórmula 8: $y_A = H \cdot sen\, \lambda_A$





Añadimos una ilustración en 3D para redundar visualmente en lo pretendemos exponer.

Intente comprender cómo obtenemos las coordenadas cartesianas x_A , y_A , z_A del punto **A** en la figura 3b.

Ahora en *fórmula 7* y *fórmula 8* sustituimos **H** por la expresión de la *fórmula 6* obteniendo

fórmula 9: $x_A = R \cdot \cos \delta_A \cdot \cos \lambda_A$

fórmula 10: $y_A = R \cdot \cos \delta_A \cdot sen\, \lambda_A$

A estas dos ecuaciones añadimos la ya conseguida

fórmula 5: $z_A = R \cdot sen\, \delta_A$

Y con estas tres fórmulas podremos pasar de latitud y longitud a coordenadas cartesianas.

Ahora obramos análogamente con el punto **B** para obtener

fórmula 11: $x_B = R \cdot \cos \delta_B \cdot \cos \lambda_B$

fórmula 12: $y_B = R \cdot \cos \delta_B \cdot sen\, \lambda_B$

fórmula 13: $z_B = R \cdot sen\, \delta_B$

Estas seis fórmulas junto con las anteriores

fórmula 4: $C^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2$

fórmula 3: $d = R \cdot \arccos\left(1 - \frac{C^2}{2 \cdot R^2}\right)$

van a ser suficientes para calcular la distancia ortodrómica (o derrota ortodrómica) entre dos puntos **A** , **B** de la superficie terrestre, dada la rapidez con que los sistemas informáticos procesan el cálculo numérico.

No obstante vamos a simplificar el cálculo intentando conseguir una única ecuación, más elegante. Si el lector no está interesado en esta siguiente sección, puede saltársela y quedarse únicamente con el resultado.

Pretendemos ahora conseguir una fórmula mucho más simple y directa para hallar la distancia ortodrómica entre dos puntos.

Comenzamos reuniendo aquellas ecuaciones que serán la base de nuestro desarrollo:

fórmula 4: $C^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2$

fórmula 9: $x_A=R\cdot\cos\delta_A\cdot\cos\lambda_A$

fórmula 10: $y_A=R\cdot\cos\delta_A\cdot sen\,\lambda_A$

fórmula 5: $z_A=R\cdot sen\,\delta_A$

fórmula 11: $x_B=R\cdot\cos\delta_B\cdot\cos\lambda_B$

fórmula 12: $y_B=R\cdot\cos\delta_B\cdot sen\,\lambda_B$

fórmula 13: $z_B=R\cdot sen\,\delta_B$

Empezamos por sustituir las variables x_A , y_A , z_A , x_B , y_B , z_B de la *fórmula 4* por sus expresiones de las fórmulas 9, 10, 5, 11, 12 y 13:

$$C^2=(R\cdot\cos\delta_A\cdot\cos\lambda_A-R\cdot\cos\delta_B\cdot\cos\lambda_B)^2+(R\cdot\cos\delta_A\cdot sen\,\lambda_A-R\cdot\cos\delta_B\cdot sen\,\lambda_B)^2+(R\cdot sen\,\delta_A-R\cdot sen\,\delta_B)^2$$

Podemos sacar R^2 como factor común en la ecuación anterior y pasarlo dividiendo al otro lado de la misma, quedando:

$$\frac{C^2}{R^2}=(\cos\delta_A\cdot\cos\lambda_A-\cos\delta_B\cdot\cos\lambda_B)^2+(\cos\delta_A\cdot sen\,\lambda_A-\cos\delta_B\cdot sen\,\lambda_B)^2+(R\cdot sen\,\delta_A-R\cdot sen\,\delta_B)^2$$

A continuación vamos a desarrollar los cuadrados de los paréntesis del lado derecho de la ecuación:

$$\frac{C^2}{R^2}=\cos^2\delta_A\cdot\cos^2\lambda_A+\cos^2\delta_B\cdot\cos^2\lambda_B-2\cdot\cos\delta_A\cdot\cos\lambda_A\cdot\cos\delta_B\cdot\cos\lambda_B+$$
$$+\cos^2\delta_A\cdot sen^2\,\lambda_A+\cos^2\delta_B\cdot sen^2\,\lambda_B-2\cdot\cos\delta_A\cdot sen\,\lambda_A\cdot\cos\delta_B\cdot sen\,\lambda_B+$$
$$+sen^2\,\delta_A+sen^2\,\delta_B-2\cdot sen\,\delta_A\cdot sen\,\delta_B$$

Sacaremos factores comunes $\cos^2\delta_A$, $\cos^2\delta_B$, $\cos\delta_A\cdot\cos\delta_B$ y quedará:

$$\frac{C^2}{R^2}=\cos^2\delta_A\cdot(\cos^2\lambda_A+sen^2\,\lambda_A)+\cos^2\delta_B\cdot(\cos^2\lambda_B+sen^2\,\lambda_B)+sen^2\,\delta_A+sen^2\,\delta_B-$$
$$-2\cdot\cos\delta_A\cdot\cos\delta_B\cdot(\cos\lambda_A\cdot\cos\lambda_B+sen\,\lambda_A\cdot sen\,\lambda_B)-2\cdot sen\,\delta_A\cdot sen\,\delta_B$$

Continuamos aplicando que la suma del seno al cuadrado más el coseno al cuadrado es la unidad. También aplicamos la fórmula del coseno de la diferencia:

$$\frac{C^2}{R^2}=\cos^2\delta_A+\cos^2\delta_B+sen^2\,\delta_A+sen^2\,\delta_B-2\cdot\cos\delta_A\cdot\cos\delta_B\cdot\cos(\lambda_A-\lambda_B)-2\cdot sen\,\delta_A\cdot sen\,\delta_B$$

Y seguimos simplificando:

$$\frac{C^2}{R^2}=2-2\cdot\cos\delta_A\cdot\cos\delta_B\cdot\cos(\lambda_A-\lambda_B)-2\cdot sen\,\delta_A\cdot sen\,\delta_B$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre 2 y redistribuyendo los términos:

fórmula 14:
$$1-\frac{C^2}{2\cdot R^2}=sen\,\delta_A\cdot sen\,\delta_B+\cos\delta_A\cdot\cos\delta_B\cdot\cos(\lambda_A-\lambda_B)$$

Si ahora recuperamos la ya deducida

fórmula 3:
$$d=R\cdot\arccos(1-\frac{C^2}{2\cdot R^2})$$

Combinando ambas fórmulas concluimos con la expresión que nos permite obtener la distancia ortodrómica (derrota ortodrómica) entre dos puntos de la superficie terrestre, dadas sus coordenadas geográficas (geodésicas) de latitud y longitud:

fórmula 15:
$$d=R\cdot\arccos(sen\,\delta_A\cdot sen\,\delta_B+\cos\delta_A\cdot\cos\delta_B\cdot\cos(\lambda_A-\lambda_B))$$

Mirando por encima la *fórmula 15* apreciamos que no presenta problemas de estabilidad en cuanto a divisiones por cero o valores extremos. La expresión entre paréntesis (el argumento del arcocoseno) debe ser un número acotado desde -1 hasta +1 con ambos extremos incluidos, por lo que podríamos hacer una simple comprobación para limitar ese valor antes de calcular el arcocoseno.

Esta fórmula es bien conocida y ampliamente usada para hallar la distancia ortodrómica. Nosotros la hemos deducido, invitando al lector a ser atrevido para realizar sus propios desarrollos aunque llegue a resultados que otros ya lograron, como en este caso.

Por otra parte, la distancia calculada es directamente proporcional al valor escogido para el radio terrestre. Siendo el radio polar de 6356000 metros y el radio ecuatorial de 6378000 metros, hallamos una diferencia de 22000 metros. Dividiendo esta diferencia entre el radio volumétrico medio que estamos usando de 6371000 metros nos da 0.345314% como estimación del error relativo. Es decir, cada 100 km podemos cometer un error de 345 metros. Esto puede resultar aceptable para muchas aplicaciones que no necesiten posicionar con mucha exactitud objetos sobre el terreno, sino sólo informar sobre trayectos de naves en tiempo real.

Concluimos aquí esta primera sección habiendo conseguido con la *fórmula 15* un método sencillo para el cálculo de la distancia ortodrómica.

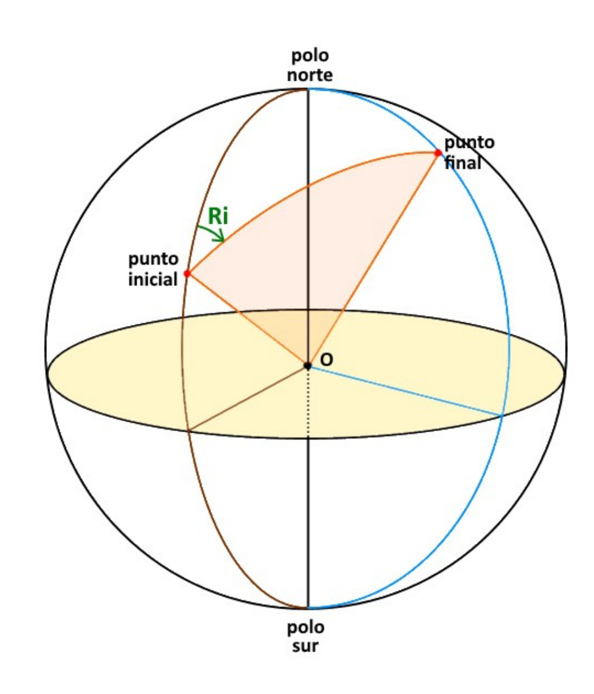
Sección 2: Cálculo simplificado del rumbo inicial ortodrómico entre dos puntos de la superficie terrestre.

En esta nueva sección abordamos otro asunto básico de la navegación ortodrómica. Deseamos realizar una trayectoria, sin abandonar la superficie terrestre, lo más directa posible (ortodrómica) desde un punto inicial hasta otro punto final; ¿qué *rumbo* tenemos que establecer inicialmente al comienzo de nuestro viaje?

El *rumbo* es la medida del ángulo en sentido horario tendido desde la dirección norte hasta la dirección en que avanzamos. Este parámetro es una coordenada horizontal que también llamamos *azimut* (o *acimut*).

El *azimut* lo vamos a expresar en grados sexagesimales con decimales, siempre positivo, desde 0º hasta 360º donde 0º está incluido pero 360º no, porque es una redundancia de 0º a efectos de notación.

Fijémonos ahora en la figura 4 para imaginar la situación. Estamos en el punto inicial y vamos a viajar por la trayectoria más corta hasta el punto final. Si conocemos el *rumbo inicial* **Ri** del viaje, primero apuntaríamos hacia el polo norte; luego rotaríamos en sentido horario tantos grados como el *azimut* dado, o *rumbo inicial*. Ahora avanzaríamos hacia nuestro destino.



Observe que el *azimut* de llegada será generalmente distinto, así como todos los intermedios. Si realizamos la ruta ortodrómica, la más directa posible, veríamos variar la aguja de nuestra brújula contínuamente.

En la práctica se establecen unos cuantos puntos intermedios consecutivos y solo se varía la dirección cuando alcanzamos la siguiente meta parcial. Entre dos puntos intermedios consecutivos no hay ajuste de dirección.

Con la automatización de los sistemas de navegación, las naves pueden realizar decenas de ajustes de dirección cada minuto. Una aplicación sencilla puede determinar su nueva posición cada segundo mediante GPS y recalcular un nuevo *rumbo inicial* para el tramo de trayectoria que falta desde ese punto.

Nosotros en esta sección vamos a deducir una fórmula que calcule el rumbo inicial de manera sencilla y que resulte práctica. De nuevo asumimos las imprecisiones de considerar la tierra como una esfera perfecta sin achatamientos.

Hay otras fórmulas que se vienen usando desde hace mucho tiempo. Una de las más utilizadas recurre a la función arcotangente en el paso final del cálculo. Se trata de la conocida

fórmula 16:
$$R_i = \arctan\left(\frac{sen(\lambda_B - \lambda_A)}{tg(\delta_B)\cdot\cos(\delta_A) - sen\,\lambda_A \cdot \cos(\delta_B - \delta_A)}\right)$$

Esta formula presenta algunas limitaciones que ahora expongo. Se calcula la función arcotangente de una división cuyo denominador puede tender a cero, creando resultados que desborden la capacidad de los procesadores aritméticos. También vemos que en el primer término del denominador se calcula una función tangente cuyo resultado también puede tender a infinito.

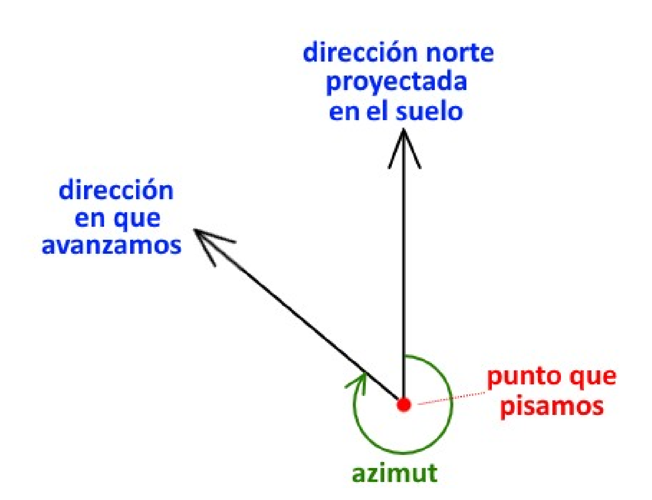
Los problemas pueden aperecer cuando se da alguna de estas estas circunstancias: punto final cerca de alguno de los polos (la tangente tiende a ±infinito); también hay ocasiones en que los puntos inicial y final se hallen en un mismo meridiano, produciendo una indeterminación 0 dividido entre 0.

Si nos limitamos al cálculo de trayectorias no demasiado largas, menores de 10000 km, podemos deducir una fórmula que evite estos problemas.

Vamos a considerar los conceptos de la geometría afín para diseñar un algoritmo, en lugar de complicarnos en desarrollos trigonométricos. Acudiremos al concepto de espacio vectorial 3D y haremos uso casi exclusivo de los conceptos de vector libre, producto escalar de dos vectores y producto vectorial de dos vectores.

En lugar de una fórmula extensa y complicada intentaremos obtener un método por pasos, un algoritmo, que nos resulte cómodo para implementar en una aplicación móvil o una página web.

Comenzamos enfocando nuestro objetivo: queremos hallar el rumbo inicial, azimut o ángulo que forma una línea imaginaria en el suelo que pisamos dirigida hacia el norte y otra línea imaginaria en el suelo que apunta en la dirección de la trayectoria que seguimos.



La figura 5 ilustra lo que buscamos. Las dos flechas negras representan dos vectores sobre el plano del terreno.

Uno de esos vectores es la proyección sobre el terreno de un vector que apunta hacia el polo norte. El otro vector es la proyección sobre el terreno de nuestra trayectoria de salida.

Mirando de nuevo la figura 4, identificamos tres planos que nos resultan especialmente interesantes.

El primero de ellos es el plano del terreno cuando pisamos el punto **A**, que resulta normal (perpendicular) al radio terrestre que va desde el centro **O** de la esfera hasta el punto **A** de partida.

El segundo plano interesante es el plano vertical que contiene al punto **A** inicial y al eje **z**.

El tercer plano considerado es el que incide a la vez con el punto **A** inicial, el punto **B** final y el centro **O** de la esfera.

La intersección del primero y segundo planos origina una recta que contiene al vector que en el suelo apunta hacia la dirección norte. Y la intersección entre el primero y tercero planos engendra una recta que contiene al vector que sobre el suelo sigue la trayectoria inicial.

Consiguiendo estos dos vectores calcularemos el ángulo que extienden y éste será nuestro azimut buscado que determinará nuestro rumbo inicial en la trayectoria del punto **A** inicial hasta el punto **B** final.

En lugar de plantear sistemas de ecuaciones que expresen estas intersecciones entre planos, optaremos por construir vectores que apunten en las direcciones que nos interesan. Para ello vamos a dotarnos de unas funciones básicas que realicen las siguentes operaciones:

Calcular el producto escalar de dos vectores, calcular el producto vectorial de dos vectores, calcular el vector unitario paralelo de otro y calcular el ángulo entre dos vectores.

Si tenemos dos vectores genéricos, podemos nombrar al primero como $\vec{u}$ mientras que el segundo será $\vec{v}$ en nuestra notación. Cada vector tiene tres componentes, sus proyecciones sobre los ejes x , y , z que en caso del vector $\vec{u}$ serán x_U , y_U , z_U como análogamente el vector $\vec{v}$ tendrá sus coordenadas cartesianas x_V , y_V , z_V correspondientes.

Usaremos el símbolo $\cdot$ para el producto escalar de dos vectores, el mismo que la multiplicación, que será reconocido porque opera sobre vectores. Ejemplo: $\vec{u}\cdot\vec{v}$

El símbolo $\wedge$ representará el producto vectorial de dos vectores. Así: $\vec{u}\wedge\vec{v}$

A la longitud de un vector le llamamos *módulo* del vector. El vector $\vec{u}$ tiene su módulo $|\vec{u}|$ asociado.

Por repasar conceptos de geometría, diremos que el resultado del producto escalar de dos vectores $\vec{u}\cdot\vec{v}$ es un número escalar equivalente al producto de la longitud (*módulo*) de uno de ellos por la proyección del otro sobre el primero. Así, podemos calcular con

fórmula 17: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\omega$

donde ω es el ángulo que forma $\vec{u}$ con $\vec{v}$ en el espacio.

Si usamos las componentes cartesianas de esos vectores, hay otra forma de calcular su producto escalar con

fórmula 18: $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_U\cdot x_V+y_U\cdot y_V+z_U\cdot z_V$

Miremos qué ocurre al calcular el producto escalar de un vector consigo mismo:

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=x_U\cdot x_U+y_U\cdot y_U+z_U\cdot z_U=x_U^2+y_U^2+z_U^2=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos 0=|\vec{u}|^2=\vec{u}^2$$

Esto nos permite calcular el módulo de un vector mediante la

fórmula 19: $|\vec{u}|=\sqrt{x_U^2+y_U^2+z_U^2}$

pero también mediante

fórmula 20: $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

Esto va a permitirnos calcular un vector de longitud unidad que sea paralelo a otro:

fórmula 21: $\vec{1}_U=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{\vec{u}}{\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}}$

Donde $\vec{1}_U$ significa un vector de longitud unidad paralelo a $\vec{u}$ y esta fórmula nos permite reducir un vector para que tenga longitud 1, un vector unitario, tomando sus coordenadas cartesianas divididas entre la raíz cuadrada del producto escalar consigo mismo.

Si ahora combinamos la

fórmula 17: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\omega$

junto con la

fórmula 20: $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

sustituyendo y simplificando obtenemos:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}\cdot\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}\cdot\cos\omega$$

Ahora despejamos el coseno:

$$\cos\omega=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}\cdot\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\sqrt{(\vec{u}\cdot\vec{u})\cdot(\vec{v}\cdot\vec{v})}}$$

Y llegamos a la ecuación que nos permitirá obtener el *azimut*, nuestro *rumbo inicial*, mediante la

fórmula 21: $\omega=\arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\sqrt{(\vec{u}\cdot\vec{u})\cdot(\vec{v}\cdot\vec{v})}}\right)$

Además de profundizar en el producto escalar también vamos a estudiar otra operación entre vectores que usaremos en nuestros cálculos: el producto vectorial. El símbolo con que lo denotaremos será $\wedge$ que también se emplea en lógica booleana.

El resultado de aplicar el producto vectorial a dos vectores arroja un tercer vector que es perpendicular (o normal) a los dos primeros vectores a la vez. El módulo del vector resultante es fácil de conocer mediante la

fórmula 22: $|\vec{u}\wedge\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen\,\omega$

Es similar a la fórmula del producto escalar, pero en este caso debemos calcular explícitamente el módulo y usamos la función seno.

En el caso de usar las coordenadas cartesianas de los vectores también tenemos esta otra

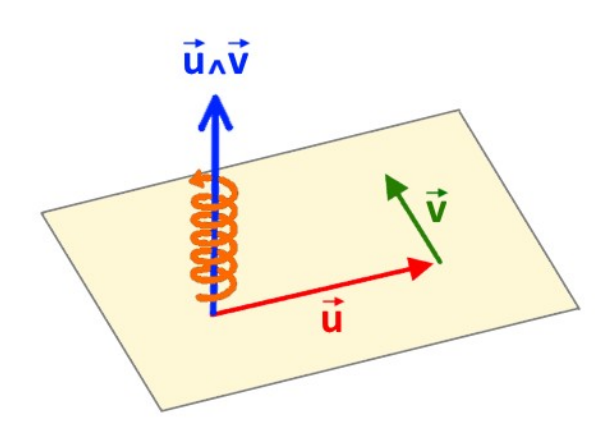
fórmula 23: $\vec{u}\wedge\vec{v}=(y_U\cdot z_V-z_U\cdot y_V)\cdot\vec{1}_X+(z_U\cdot x_V-x_U\cdot z_V)\cdot\vec{1}_Y+(u_X\cdot v_Y-u_Y\cdot v_X)\cdot\vec{1}_Z$

donde el resultado es otro vector y denotamos $\vec{1}_X$, $\vec{1}_Y$, $\vec{1}_Z$ como vectores unitarios con la dirección de su respectivo eje. También podemos expresar el vector separando sus coordenadas mediante comas y encerrando la terna entre paréntesis, como en la

fórmula 24: $\vec{u}\wedge\vec{v}=(y_U\cdot z_V-z_U\cdot y_V\ ,\ z_U\cdot x_V-x_U\cdot z_V\ ,\ u_X\cdot v_Y-u_Y\cdot v_X)$

Hay que recordar que la dirección del vector resultante es siempre perpendicular a los dos vectores de partida.

El sentido de la dirección viene determinada por la regla del tornillo dextrógiro (a derechas) según la figura 6.



Si solo nos interesase el módulo del vector resultante, podríamos aplicar, por ejemplo:

fórmula 25: $|\vec{u}\wedge\vec{v}|=\sqrt{(y_U\cdot z_V-z_U\cdot y_V)^2+(z_U\cdot x_V-x_U\cdot z_V)^2+(x_U\cdot y_V-y_U\cdot x_V)^2}$

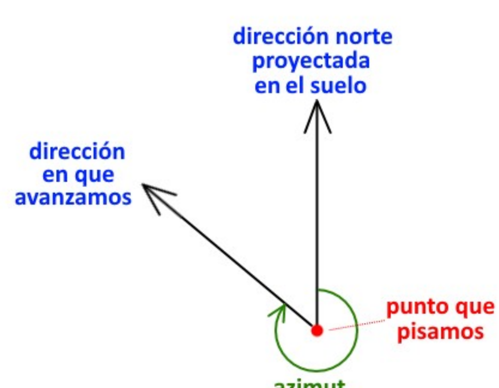
Trayendo de nuevo la

fórmula 22: $|\vec{u}\wedge\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen\,\omega$

Podemos despejar el ángulo así:

fórmula 26: $\omega=arcsen\left(\frac{|\vec{u}\wedge\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$

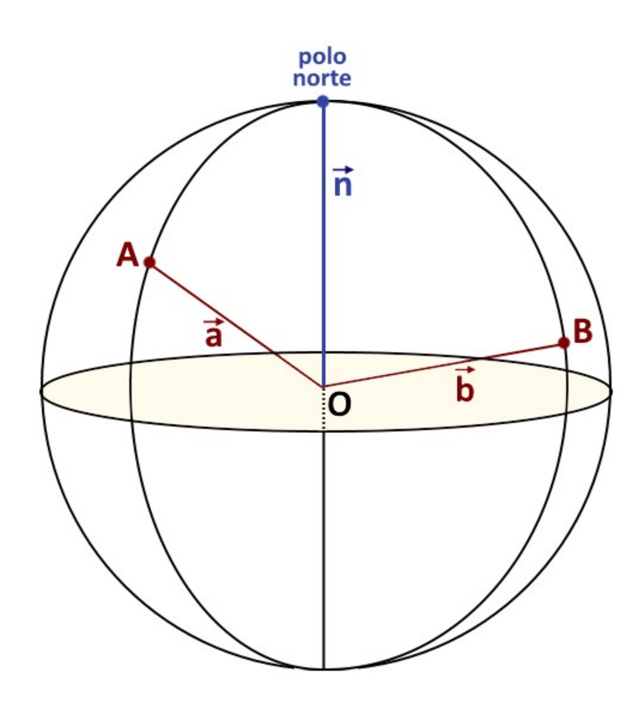
Una vez provistos con estas herramientas, vamos a analizar cómo conseguir los dos vectores tangentes al terreno de la figura 5 que determinarán el azimut que buscamos.



Al vector que apunta hacia el norte lo nombraremos $\vec{n}$ (recordando norte), mientras que para el vector que marca la dirección del rumbo inicial usaremos el símbolo $\vec{r}_I$ (recordando rumbo inicial).

Construiremos nuestros vectores sin emplear cálculos que usen divisiones con posibles problemas de infinitos. En vez de ello, aprovecharemos la propiedad del producto escalar para conseguir vectores unitarios, y la propiedad del producto vectorial para conseguir vectores normales (perpendiculares) a algunos planos.

Vamos a identificar en la figura 7 algunos elementos que usaremos en adelante.

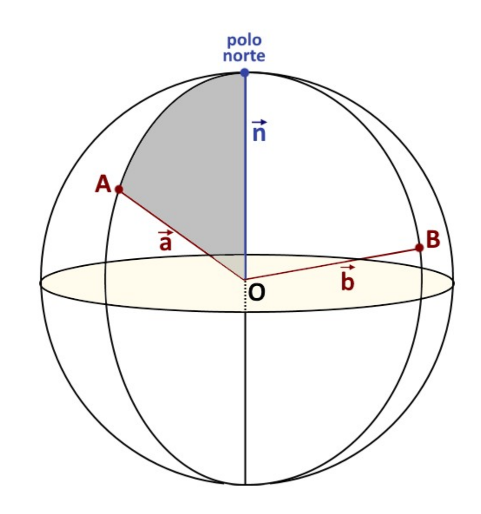


Tenemos la esfera con su centro O conectado mediante el vector $\vec{n}$ con el polo norte.

Vemos representados el punto A inicial y el punto B final, ambos conectados con el origen mediante los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ respectivos.

Vamos a resaltar parte de un plano que contiene a los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ como también el sector circular definido por los tres puntos O , A , polo norte.

La zona gris de la figura 8 muestra el plano al que nos estamos refiriendo.

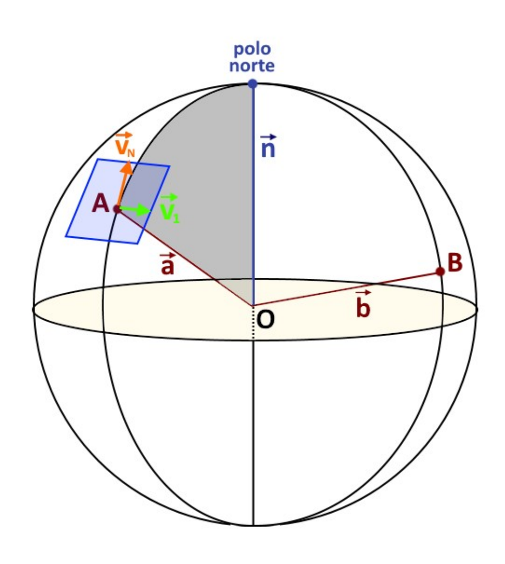


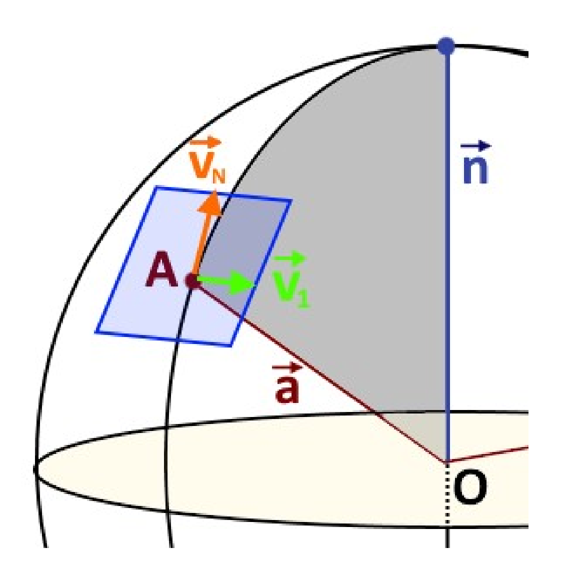
Este plano es interesante porque pasa por el eje z que incide en el polo norte. Además es normal al plano del terreno en el punto A inicial.

Un objetivo nuestro es encontrar un vector que, partiendo del punto se dirija hacia el norte y sea paralelo al plano del terreno. A este vector le llamaremos $\vec{v}_N$ pensando en que será el 0 ºN del azimut.

En la figura 9 hemos añadido el plano del terreno conteniendo al vector $\vec{v}_N$ (en color naranja) saliendo del punto A dirigido hacia el norte local del terreno.

También hemos representado un vector $\vec{v}_1$ (en color verde) que es perpendicular al plano gris, por lo cual también es normal a los vectores $\vec{a}$, $\vec{n}$ intuyendo que podemos construirlo mediante el producto vectorial de estos últimos.





Hemos ampliado el detalle en la figura 9b para mayor claridad.

Vemos, entonces que el vector lo podemos obtener mediante la

fórmula 27: $\vec{v}_1 = \vec{n} \wedge \vec{a}$

Las coordenadas de $\vec{n}$ son las del polo norte: (0 , 0 , R) siendo R el radio terrestre. Pero nosotros buscamos como resultado un ángulo que no dependerá del radio de la esfera. En algún momento R desaparecerá en alguna simplificación. Por tanto, vamos a suponer el radio R como 1 sabiendo que esto no influirá en el resultado y que hace más facil el desarrollo.

Es decir:

fórmula 28: $\vec{n} = (0 , 0 , 1)$

Y recordando lo ya visto en la sección 1 de este documento:

fórmula 29: $\vec{a} = (\cos\delta_A \cdot \cos\lambda_A , \cos\delta_A \cdot sen\,\lambda_A , sen\,\delta_A)$

También observamos que el vector $\vec{v}_N$ es normal a los vectores $\vec{a}$, $\vec{v}_1$ expresándolo así:

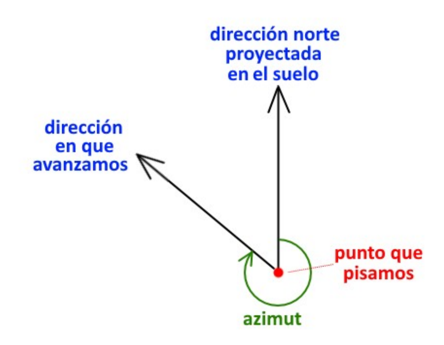
fórmula 30: $\vec{v}_N = \vec{a} \wedge \vec{v}_1$

que en combinación con la

fórmula 27: $\vec{v}_1 = \vec{n} \wedge \vec{a}$

llegamos a la

fórmula 31: $\vec{v}_N = \vec{a} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{a})$

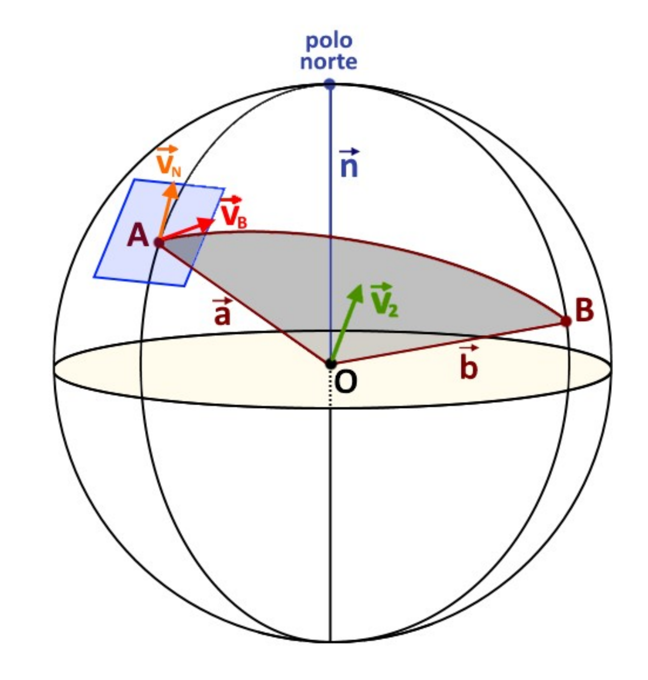


Ahora nos vamos a ocupar de conseguir un vector paralelo al terreno que señale la dirección en que avanzamos.

Este vector nos dirige por la ruta más corta hacia el punto B final. Le asignamos la notación $\vec{v}_B$ ilustrándolo en la figura 10.

De manera similar a cómo hemos actuado en el caso de $\vec{v}_N$ usaremos el producto vectorial para conseguir un vector como $\vec{v}_B$ en unos pocos pasos.

Para ello nos fijamos en la figura 10. Queremos conseguir un vector $\vec{v}_B$ mostrado en color rojo, coplanario con el terreno donde también está $\vec{v}_N$ mostrado en naranja. El rumbo inicial estará determinado por el ángulo que formen ambos vectores.



En primer lugar construiremos el vector $\vec{v}_2$ perpendicular al plano (en gris) incidente sobre los puntos A , O , B como apreciamos en la figura 10.

Este vector $\vec{v}_2$ será normal tanto al vector $\vec{a}$ como al vector $\vec{b}$ intuyendo que el producto vectorial de estos últimos producirá el primero:

fórmula 32: $\vec{v}_2 = \vec{a} \wedge \vec{b}$

Y en un segundo paso contruimos el vector $\vec{v}_B$ que es normal tanto al vector $\vec{v}_2$ como al vector $\vec{a}$ recurriendo de nuevo al producto vectorial de estos últimos:

fórmula 33: $\vec{v}_B = \vec{v}_2 \wedge \vec{a}$

Sustituyendo en la ecuación anterior llegamos a la

fórmula 34: $\vec{v}_B = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \vec{a}$

Consiguiendo nuestro objetivo de dos vectores que extienden nuestro *azimut* buscado.

Por último vamos a exponer los pasos de nuestro algoritmo para hallar el *rumbo inicial* de la trayectoria entre los puntos inicial y final:

Tendremos que solicitar al usuario las coordenadas geográficas de los puntos A, B como también asignar las coordenadas del polo norte:

$\vec{n} = (0 , 0 , 1)$ aplicando la *fórmula 28*

$\vec{a} = (\cos\delta_A \cdot \cos\lambda_A , \cos\delta_A \cdot sen\,\lambda_A , sen\,\delta_A)$ aplicando la *fórmula 29*

Usaremos una variable para cada coordenada en nuestro algoritmo. También consideraremos que las funciones trigonométricas en los lenguajes de programación usan radianes y convertiremos grados sexagesimales a radianes usando la fórmula:

$$radianes = grados \cdot \frac{\pi}{180}$$

Para terminar el algoritmo tenemos que calcular el ángulo que forma el vector $\vec{v}_N$ con el vector $\vec{v}_B$ pudiendo optar entre varias posibilidades. Por un lado podríamos usar la ya vista

fórmula 21: $$\omega = \arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\sqrt{(\vec{u}\cdot\vec{u})\cdot(\vec{v}\cdot\vec{v})}}\right)$$

aplicándola a los vectores $\vec{v}_N$, $\vec{v}_B$ teniendo en cuenta que son vectores unitarios y, por tanto, ya no es necesario calcular sus módulos para el denominador.

Por otro lado podemos calcular el seno y el coseno del azimut para hacerlo de una manera con menos ambigüedades, como mostramos a continuación:

Calculamos el coseno mediante la ya conocida

fórmula 17: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\omega$

sabiendo que los vectores $\vec{v_N}$, $\vec{v_B}$ son unitarios y simplificando adaptamos la expresión: $\cos\omega=\vec{v_N}\cdot\vec{v_B}$

Como trabajamos con las cordenadas cartesianas, hacemos uso de la

fórmula 18: $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_U\cdot x_V+y_U\cdot y_V+z_U\cdot z_V$

adaptándola a nuestros vectores, formando la

fórmula 35: $\cos\omega=x_{VN}\cdot x_{VB}+y_{VN}\cdot y_{VB}+z_{VN}\cdot z_{VB}$

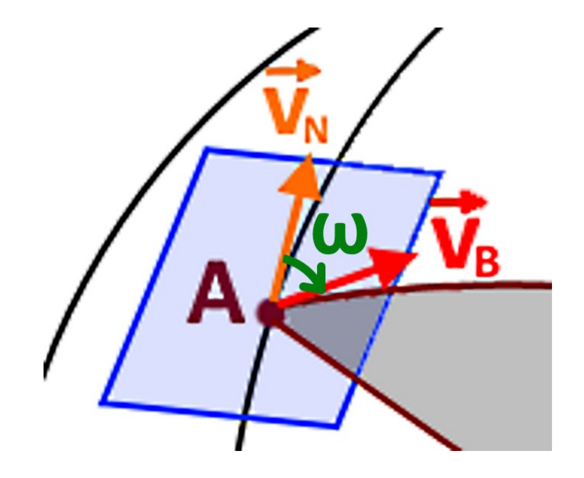
De manera similar obtendremos el seno del azimut, esta vez usando el producto vectorial, para ello recordamos:

fórmula 22: $|\vec{u}\wedge\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen\,\omega$

fórmula 25: $|\vec{u}\wedge\vec{v}|=\sqrt{(y_U\cdot z_V-z_U\cdot y_V)^2+(z_U\cdot x_V-x_U\cdot z_V)^2+(u_X\cdot v_Y-u_Y\cdot v_X)^2}$

Las combinamos y adaptamos a nuestros vectores, teniendo en cuenta de nuevo que son unitarios para formar la

fórmula 36: $sen\,\omega=\sqrt{(y_{VN}\cdot z_B-z_{VN}\cdot y_B)^2+(z_{VN}\cdot x_B-x_{VN}\cdot z_B)^2+(x_{VN}\cdot y_B-y_{VN}\cdot x_B)^2}$



En la figura 11 ilustramos el azimut en color verde junto con los vectores que lo engendran.

La mayoría de lenguajes de programación disponen de una función $atan2()$ que es muy útil para pasar de coordenadas cartesianas a polares.

Esta función requiere dos argumentos: el seno y el coseno, dicho de otro modo las coordenadas cartesianas x , y cuando queremos obtener el equivalente a

$$arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

La notación, por ejemplo, en Javascript de esta función es:

fórmula 37: $azimut=atan2(y,x)$

Y con esto ya podemos plasmar nuestro algoritmo ordenado por pasos y comentado.

Algoritmo para calcular el rumbo inicial de una trayectoria ortodrómica entre dos puntos conociendo sus coordenadas geográficas:

paso 1: $introducir\ latitud\ del\ punto\ A\ en: \delta_A$

paso 2: $introducir\ longitud\ del\ punto\ A\ en: \lambda_A$

paso 3: $introducir\ latitud\ del\ punto\ B\ en: \delta_B$

paso 4: $introducir\ longitud\ del\ punto\ B\ en: \lambda_B$

paso 5: $\delta_A = \delta_A \cdot \frac{\pi}{180}$

paso 6: $\lambda_A = \lambda_A \cdot \frac{\pi}{180}$

paso 7: $\delta_B = \delta_B \cdot \frac{\pi}{180}$

paso 8: $\lambda_B = \lambda_B \cdot \frac{\pi}{180}$

paso 9: $x_N = 0$

paso 10: $y_N = 0$

paso 11: $z_N = 1$

paso 12: $x_A = \cos \delta_A \cdot \cos \lambda_A$

paso 13: $y_A = \cos \delta_A \cdot sen\, \lambda_A$

paso 14: $z_A = sen\, \delta_A$

paso 15: $x_B = \cos \delta_B \cdot \cos \lambda_B$

paso 16: $y_B = \cos \delta_B \cdot sen\, \lambda_B$

paso 17: $z_A = sen\, \delta_B$

paso 18: $x_{V1} = y_N \cdot z_A - z_N \cdot y_A$

paso 19: $y_{V1} = z_N \cdot x_A - x_N \cdot z_A$

paso 20: $z_{V1} = x_N \cdot y_A - y_N \cdot x_A$

paso 21: $x_{VN} = y_A \cdot z_{V1} - z_A \cdot y_{V1}$

paso 22: $y_{VN} = z_A \cdot x_{V1} - x_A \cdot z_{V1}$

paso 23: $z_{VN}=x_A \cdot y_{V1}-y_A \cdot x_{V1}$

paso 24: $m_{VN}=\sqrt{x_{VN}^2+y_{VN}^2+z_{VN}^2}$

paso 25: $x_{VN}=\frac{x_{VN}}{m_{VN}}$

paso 26: $y_{VN}=\frac{y_{VN}}{m_{VN}}$

paso 27: $z_{VN}=\frac{z_{VN}}{m_{VN}}$

paso 28: $x_{V2}=y_A \cdot z_B-z_A \cdot y_B$

paso 29: $y_{V2}=z_A \cdot x_B-x_A \cdot z_B$

paso 30: $z_{V2}=x_A \cdot y_B-y_A \cdot x_B$

paso 31: $x_{VB}=y_{V2} \cdot z_A-z_{V2} \cdot y_A$

paso 32: $y_{VB}=z_{V2} \cdot x_A-x_{V2} \cdot z_A$

paso 33: $z_{VB}=x_{V2} \cdot y_A-y_{V2} \cdot x_A$

paso 34: $m_{VB}=\sqrt{x_{VB}^2+y_{VB}^2+z_{VB}^2}$

paso 35: $x_{VB}=\frac{x_{VB}}{m_{VB}}$

paso 36: $y_{VB}=\frac{y_{VB}}{m_{VB}}$

paso 37: $z_{VB}=\frac{z_{VB}}{m_{VB}}$

paso 38: $\omega_X=x_{VN} \cdot x_{VB}+y_{VN} \cdot y_{VB}+z_{VN} \cdot z_{VB}$

paso 39: $\omega_Y=\sqrt{(y_{VN} \cdot z_{VB}-z_{VN} \cdot y_{VB})^2+(z_{VN} \cdot x_{VB}-x_{VN} \cdot z_{VB})^2+(x_{VN} \cdot y_{VB}-y_{VN} \cdot x_{VB})^2}$

paso 40: $\omega=atan2(\omega_Y,\omega_X) \cdot \frac{180}{\pi}$

paso 41: Escribir rumbo inicial R_i desde: ω

Sección 3: Comprobación de la fórmula de la distancia ortodrómica y del algoritmo del rumbo inicial.

En esta última sección vamos a poner a prueba nuestros desarrollos de la fórmula para el cálculo de la distancia ortodrómica y del algoritmo para el cálculo del *rumbo inicial* de la trayectoria ortodrómica.

Vamos a tomar las coordenadas geodésicas de dos ciudades, Zaragoza en España y Berlín en Alemania, para luego comprobar nuestros resultados con los de alguna célebre calculadora online pública para navegación:

Zaragoza:
latitud: 41.65078071020651 ºN
longitud: -0.8888014436201552 ºE

Berlín:
latitud: 52.520779305747965 ºN
longitud: 13.38960953926479 ºE

Radio terrestre: 6371000 metros

Asistidos por una hoja de cálculo realizamos el cálculo de la distancia ortodrómica entre las ciudades escogidas y con el radio terrestre citado. Introduciendo los datos de coordenadas geográficas y las fórmulas de conversión a radianes y de cálculo de la distancia.

El resultado aparece en la figura 12:

Zaragoza	latitud:	41,6507807102065	ºN	0,726943259419246	radianes
	longitud:	-0,888801443620155	ºE	-0,0155125115876505	radianes
Berlín	latitud:	52,520779305748	ºN	0,916660524598604	radianes
	longitud:	13,3896095392648	ºE	0,233692772016612	radianes
	radio terrestre:	6371000	metros		
	distancia ortodrómica:	1615757,61955421	metros		

Vamos a comparar este resultado de 1615757.61955421 con el de alguna página web pública y fiable, como

http://rodamedia.com/navastro/online/javascripts/ortodromica_comp.htm

En la figura 13 mostramos un pantallazo de una parte de la página web:

rodamedia.com/navastro/online/javascripts/ortodromica_comp.htm

Navegación ortodrómica

Origen (Situación inicial):

Latitud : 41.650 grados 0 minutos Norte N/S
Longitud : 0.8888 grados 0 minutos Oeste E/W

Destino (Situación final):

Latitud : 52.520 grados 0 minutos Norte N/S
Longitud : 13.389 grados 0 minutos Este E/W

Calcular Borrar Volver

Buenas noches
Miércoles, 27 /07/2022
3:34:36 UTC

Inicio
Publicaciones
Navegación
Meteorología
Astronomía
Seguridad
Descargas
Foro
Contacto

Resultados:

Rumbo ortodrómico inicial: 36.735679 grados
Distancia ortodrómica: 871.8514423: millas náuticas

Ahora convertimos la distancia ortodrómica de millas a metros para obtener el resultado. También tomamos nota del rumbo inicial ofrecido en la misma página web.

distancia ortodrómica: 1615757.61955421 metros
rumbo ortodrómico inicial: 36.7356798707116 ºN

Observamos que el cálculo de la distancia coincide con el que nosotros hemos realizado perfectamente. Ello es porque están empleando la misma expresión que nosotros:

fórmula 15: $$d = R \cdot \arccos\left(sen\,\delta_A \cdot sen\,\delta_B + \cos\delta_A \cdot \cos\delta_B \cdot \cos(\lambda_A - \lambda_B)\right)$$

Acudimos a una segunda página web pública y de confianza, que realiza un cálculo más sofisticado, no en el cliente con Javascript sino en su servidor

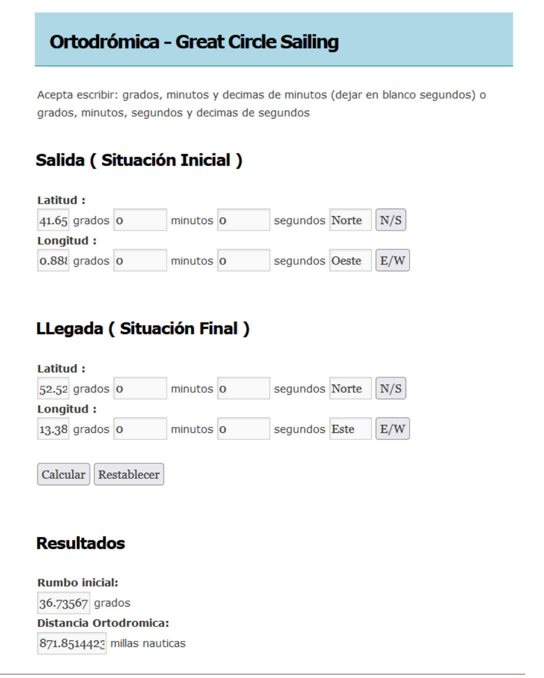
https://www.webmar.com/web/calc/cal_orto.php

En la figura 14 vemos parte de la página web donde hemos introducido los mismos datos y como resultado obtenemos:

distancia ortodrómica: 871.8514423157484 millas náuticas
rumbo inicial: 36.735679870711564 ºN

Convirtiendo las millas náuticas a metros con solo multiplicar por los 1852 metros que tiene cada milla náutica, llegamos a una

distancia ortodrómica: 1614668.8711687660368 metros



y con nuestro resultado: 1615757.61955421 metros
estimamos nuestro error relativo: 0.0674%

Este error relativo nos parece muy aceptable para nuestros propósitos.

Las dos páginas web arrojan un resultado prácticamente idéntico para el rumbo inicial; nos quedaremos con la referencia de 36.735679870711564 ºN para comparar con el rumbo inicial que obtengamos nosotros.

Vamos a codificar nuestro algoritmo en lenguaje Javascript dentro de un documento HTML mínimo añadiéndole el cálculo de la distancia ortodrómica.

Programa en Javascript para calcular la derrota y el rumbo inicial de una trayectoria ortodrómica entre dos puntos conociendo sus coordenadas geográficas:

```
<!DOCTYPE html>
<html lang=es >
<head><title> Cálculo del rumbo inicial ortodrómico</title>
<meta charset="utf-8" /><meta name=viewport content="width=device-width, initial-
scale=1.0" />
<meta name=author content="© 2022 Carlos Grasa Lambea" />

<style>
    .separa1 {
        display: inline-block;
        width: 15rem;
        text-align: right;
    }
</style>

</head>
<body>
    <h1>Cálculo de distancia y rumbo inicial ortodrómicos</h1>
    <hr /><br/>
    <span class=separa1 >latitud A: </span><input id=latituda type=text size=25
value=41.6568 /><br/>
    <span class=separa1 >longitud A: </span><input id=longituda type=text size=25
value=-0.8785 />
    <br/><br/>
    <span class=separa1 >latitud B: </span><input id=latitudb type=text size=25
value=52.5163 /><br/>
    <span class=separa1 >longitud B: </span><input id=longitudb type=text size=25
value=13.3777 />
    <br/><br/>
    <span class=separa1 ></span>
    <input id=botoncalcular type=button value="calcular" onclick="calcular();" />
    <br/><br/>
    <span class=separa1 >distancia ortodrómica: </span><input
id=distanciaortodromica type=text size=25 value="" /><br/>
    <span class=separa1 >rumbo inicial ortodrómico: </span><input id=azimut
type=text size=25 value="" />
```

```
    <br/><br/><hr/><br/>
    <section id=logs ></section>

<script>

// Algoritmo para cálculo de Rumbo Inicial Ortodrómico mediante productos escalar y
vectorial
// © 2022 Carlos Grasa Lambea

const calcular=function() {

let r=6371000;       // radio volumétrico medio terrestre en metros

// introducción de datos comprobando validez
let latA=document.querySelector("#latituda").value;      // latitud del punto inicial
let lonA=document.querySelector("#longituda").value;     // longitud del punto inicial
let latB=document.querySelector("#latitudb").value;      // latitud del punto final
let lonB=document.querySelector("#longitudb").value;     // longitud del punto final

// conversión de grados sexagesimales a radianes
latA*=Math.PI/180;
lonA*=Math.PI/180;
latB*=Math.PI/180;
lonB*=Math.PI/180;

let n=[0, 0, 1];                      // coordenadas del polo norte en esfera de radio 1
let a=cartesianas(latA, lonA);        // vector del punto A en coordenadas cartesianas
let b=cartesianas(latB, lonB);        // vector del punto B en coordenadas cartesianas
let v1=productoVectorial(n, a);       // cálculo del vector v1 como producto vectorial de
n^a
let vn=productoVectorial(a, v1);      // vector vn como producto vectorial de a^v1
vn=unitario(vn);                      // hacer unitario el vector vn
let v2=productoVectorial(a, b);       // vector v2 como producto vectorial de a^b
let vb=productoVectorial(v2, a);      // vector vb como producto vectorial de v2^a
vb=unitario(vb);                      // hacer unitario el vector vb

// calcular coseno y seno del azimut
let wx=productoEscalar(vn, vb);                 // coseno como producto escalar de <vn,vb>
let wy=modulo(productoVectorial(vn, vb));       // seno como módulo del producto vectorial
de vn^vb

let rio=Math.atan2(wy, wx)*180/Math.PI;        // azimut del rumbo inicial ortodrómico en
grados
if (rio<0)                                     // si es negativo, añadir 360°
    rio+=360;
let dort=r*Math.acos(Math.sin(latA)*Math.sin(latB)
+Math.cos(latA)*Math.cos(latB)*Math.cos(lonA-lonB));     // distancia ortodrómica en
metros

// imprimir distancia ortodrómica y rumbo inicial ortodrómico
```

```
document.querySelector("#distanciaortodromica").value=Math.round(dort*10000)/10000+"
metros";
document.querySelector("#azimut").value=Math.round(rio*10000)/10000+" °N";

return;
};

const productoVectorial=function(a, b) {
    return [a[1]*b[2]-a[2]*b[1], a[2]*b[0]-a[0]*b[2], a[0]*b[1]-a[1]*b[0]];
};

const cartesianas=function(lat, lon) {
    return [Math.cos(lat)*Math.cos(lon), Math.cos(lat)*Math.sin(lon), Math.sin(lat)];
};

const unitario=function(v) {
    let norma=modulo(v);
    if (Math.abs(norma)<1e-9)
        return v;
    else
        return escalarVector(1/norma, v);
};

const productoEscalar=function(a, b) {
    return a[0]*b[0]+a[1]*b[1]+a[2]*b[2];
};

const modulo=function(v) {
    return Math.sqrt(productoEscalar(v, v));
};

const escalarVector=function(k, v) {
    return [k*v[0], k*v[1], k*v[2]];
};

const sumaVectorial=function(a, b) {
    return [a[0]+b[0], a[1]+b[1], a[2]+b[2]];
};

const restaVectorial=function(a, b) {
    return sumaVectorial(a, escalarVector(-1, b));
};

</script>

</body>
</html>
```

El programa toma por omisión las coordenadas geográficas de la ciudad de Zaragoza en España como punto inicial y las de Berlín en Alemania como punto final.

La ejecución del programa nos devuelve el siguiente resultado

Distancia ortodrómica: 1615757.619554206 metros
Rumbo inicial ortodrómico: 36.735679870711564 ºN

Lo cual coincide perfectamente con las referencias tomadas de las páginas web consultadas. Vemos así que nuestro método es aceptable para las aplicaciones que tenemos en expectativa.

Carlos Grasa Lambea